PS Investition und Finanzierung

Finanzmathematische Grundlagen

Institut für Banken und Finanzen, Universität Innsbruck

Wintersemester 2020/21

Zinsrechnung

Grundlagen

Wichtiger Grundsatz:

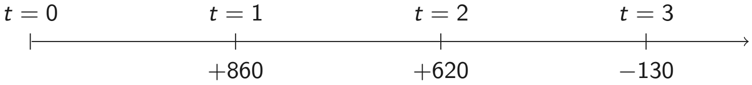
Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen.

- Gründe dafür sind...
  - Risiko,
  - Inflation und
  - Zinsen.

Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten können daher nicht direkt miteinander verglichen werden — durch Zinsrechnung werden Vergleiche möglich.

Grundlagen

- **Beispiel eines Zahlungsstroms:**



  - Einzahlungen werden durch ein positives Vorzeichen, Auszahlungen durch ein negatives Vorzeichen gekennzeichnet.

Annahmen

- Zahlungen fallen jeweils am Ende einer Periode an.
- $t = 0$ bezeichnet den Jetztzeitpunkt ("heute").

Vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt:

- Der Begriff **"Kapitalmarkt"** beschreibt einen Markt für die Anlage und Aufnahme von mittel- bis langfristigem Kapital (der Markt für kurzfristige Anlage/Aufnahme von Kapital wird als *"Geldmarkt"* bezeichnet).
- Kapitalmärkte sind komplexe Gebilde: Um sie formal modellieren zu können, werden üblicherweise vereinfachende Annahmen getroffen → *Abstraktion*.
- Obwohl stark restriktiv und ökonomisch kaum klar rechtzufertigen, wird oft das Modell eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkts unterstellt.

Annahmen (Fortführung)

- **Vollständiger Kapitalmarkt:**
  - Jeder beliebige (zukünftige) Zahlungsstrom kann gehandelt werden.
  - Ökonomisch betrachtet: Gleichgewichtsallokationen sind Pareto-optimal.

- **Vollkommener Kapitalmarkt:**
  - Rationalität und homogene Erwartungen
  - Perfekter Wettbewerb $\rightarrow$ identischer Zinssatz
  - Keine Transaktions- und Informationskosten, keine Steuern
  - Keine zeitlichen, örtlichen, sachlichen oder persönlichen Präferenzen

  $\Rightarrow$ Daraus folgt: ein vollkommener Kapitalmarkt ist *arbitragefrei*.

Zusammengesetzte Verzinsung

- Zinsen werden dem Kapital hinzugerechnet und weiter verzinst (*Zinseszinsen*)

$$t = 1: \quad K_1 = K_0 + K_0 \cdot r = K_0 \cdot (1 + r)$$
$$t = 2: \quad K_2 = K_1 + K_1 \cdot r = K_0 \cdot (1 + r)^2$$
$$t = 3: \quad K_3 = K_2 + K_2 \cdot r = K_0 \cdot (1 + r)^3$$
$$\ldots$$

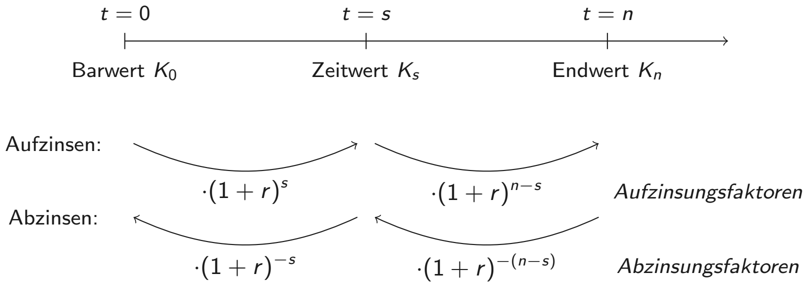
Allgemein

Aufzinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$

Abzinsen: $K_0 = K_n \cdot (1 + r)^{-n}$

Der Term $1 + r$ wird auch als *Aufzinsungsfaktor q* bezeichnet.

Zeitwerte und Äquivalenz



Zahlungen heißen *äquivalent*, wenn ihre auf einen gemeinsamen Zeitpunkt bezogenen Zeitwerte übereinstimmen.

Effektive Verzinsung, Rendite

- Sind die Zahlungen in $t = 0$ und $t = n$ bekannt, lässt sich aus der Formel

  $$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

  die Rendite (effektive Verzinsung; jährliche prozentuale Kapitaländerung) des Zahlungsstroms für den entsprechenden Zeitraum berechnen.

Effektive Verzinsung, Rendite

$$r_{\text{eff}} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Beispiel: Effektive Verzinsung

Frage:

Vor 7 Jahren haben Sie 6.000€ in Gold investiert. Heute verkaufen Sie das Gold und erhalten dafür 6.840€. Wie hoch war die Effektivverzinsung pro Jahr? Geben Sie das Endergebnis in Prozent und auf zwei Kommastellen gerundet an.

Beispiel: Effektive Verzinsung

Frage:

Vor 7 Jahren haben Sie 6.000€ in Gold investiert. Heute verkaufen Sie das Gold und erhalten dafür 6.840€. Wie hoch war die Effektivverzinsung pro Jahr? Geben Sie das Endergebnis in Prozent und auf zwei Kommastellen gerundet an.

Lösung:

$$r_{\text{eff}} = \left(\frac{6.840}{6.000}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 = 1{,}89\%.$$

Unterjährige Verzinsung

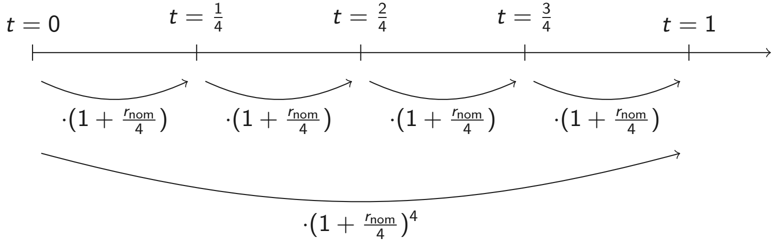
- Bei unterjähriger Verzinsung wird der nominale Jahreszinssatz r_{nom} durch die Zahl der Perioden m pro Jahr dividiert, und m-mal pro Jahr verrechnet (Zinstagerechnung).

Daraus folgt der generelle *Aufzinsungsfaktor*: $q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$

- Durch Zinseszinseffekte innerhalb eines Jahres ergibt sich damit ein effektiver Jahreszinssatz, der in der Regel von r_{nom} abweicht ($r_{\text{nom}} < r_{\text{eff}}$).

Unterjährige Verzinsung (Fortführung)

- **Beispiel:** Bei $r_{\text{nom}} = 4\%$ und vierteljährlicher Verzinsung ($m = 4$) wird eine Investition bzw. Finanzierung effektiv mit 1% pro Quartal verzinst:



Unterjährige Verzinsung

Effektiver Jahreszinssatz bei unterjähriger Verzinsung mit m Zinsterminen

$$1 + r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m \quad \Rightarrow \quad r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m - 1$$

Endwert und Barwert bei unterjähriger Verzinsung mit m Zinsterminen

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^{m \cdot n}$$

$$K_0 = K_n \cdot \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^{-(m \cdot n)}$$

Beispiel: Unterjährige Verzinsung

Frage:

Sie legen heute 12.000€ auf ein Konto. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. bei vierteljährlicher Verzinsung. Wie viel Geld befindet sich nach 18 Jahren auf dem Konto? Runden Sie das Endergebnis auf zwei Kommastellen.

Beispiel: Unterjährige Verzinsung

Frage:

Sie legen heute 12.000€ auf ein Konto. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. bei vierteljährlicher Verzinsung. Wie viel Geld befindet sich nach 18 Jahren auf dem Konto? Runden Sie das Endergebnis auf zwei Kommastellen.

Lösung:

$$K_{18} = 12.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4 \cdot 18} = 24.565{,}19$$

Diskrete vs. stetige Verzinsung

- *Diskrete Verzinsung:*
  Endliche Anzahl an Zinsterminen pro Jahr (jährliche und unterjährige Verzinsung)

- *Stetige Verzinsung:*
  Unendlich viele Zinstermine pro Jahr (unterjährige Verzinsung), $m \to \infty$

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{r_{\text{nom}}}$$

mit $\mathrm{e} = 2{,}718281\ldots$ (Eulersche Zahl)

Endwert und Barwert bei stetiger Verzinsung

$$K_n = K_0 \cdot \mathrm{e}^{r_{\text{nom}} \cdot n}$$

$$K_0 = K_n \cdot \mathrm{e}^{-r_{\text{nom}} \cdot n}$$

Konformer Zinssatz

- Der *konforme Zinssatz* ist der finanzwirtschaftlich korrekte nominale Jahreszinssatz, der bei unterjähriger Verzinsung einem gegebenen effektiven Jahreszinssatz entspricht.

Konformer Zinssatz bei m Zinsterminen:

$$1 + r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{\text{konf},m} = m \cdot \left(\sqrt[m]{1 + r_{\text{eff}}} - 1\right)}$$

Konformer Zinssatz bei stetiger Verzinsung:

$$1 + r_{\text{eff}} = \mathrm{e}^{r_{\text{nom}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{\text{konf},\infty} = \ln(1 + r_{\text{eff}})}$$

Beispiel: Konformer Zinssatz

Frage:

Die Effektivverzinsung für eine Anlage beträgt 3% p.a. Wie hoch ist der konforme Zinssatz bei halbjährlicher bzw. stetiger Verzinsung? Geben Sie das Endergebnis in Prozent und auf zwei Kommastellen gerundet an.

Beispiel: Konformer Zinssatz

Frage:

Die Effektivverzinsung für eine Anlage beträgt 3% p.a. Wie hoch ist der konforme Zinssatz bei halbjährlicher bzw. stetiger Verzinsung? Geben Sie das Endergebnis in Prozent und auf zwei Kommastellen gerundet an.

Lösung:

$$r_{\text{konf},2} = 2 \cdot (\sqrt[2]{1 + 0{,}03} - 1) = 2{,}98\%$$

$$r_{\text{konf},\infty} = \ln(1 + 0{,}03) = 2{,}96\%$$

Rentenrechnung

Grundlagen

Periodisch anfallende Zahlungen bezeichnet man als *Rente*.

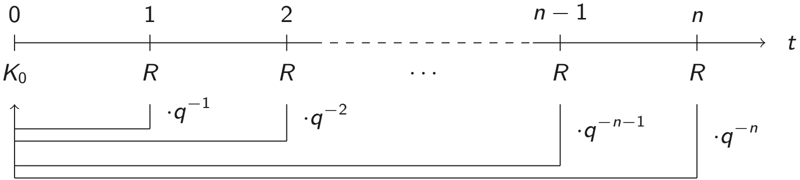
- Konstante, steigende oder fallende Renten
- Endliche oder unendliche Renten

- Rentenperiode $=$ Zinsperiode
- Rentenperiode $\neq$ Zinsperiode

- *Spezialfall: Annuität $=$ jährliche konstante Zahlung*

Rentenrechnung

Rentenbarwert



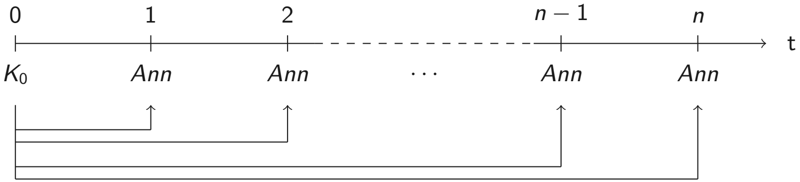
$$K_0 = \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \frac{R}{q^3} + \ldots + \frac{R}{q^{n-1}} + \frac{R}{q^n} \qquad \rightarrow \text{Geometrische Reihe}$$

Barwert einer endlichen Rente

$$K_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = R \cdot \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Annuität

- Um einen gegebenen Kapitalstock K_0 in konstante jährliche Zahlungen (Ann) zu transformieren, wird mit dem Kehrwert des Rentenbarwertfaktors gearbeitet.



Annuität

$$Ann = R = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Beispiel: Annuität

Frage:

Sie wollen jährlich ab $t = 1$ einen konstanten Betrag auf ein Sparbuch mit einem Zinssatz von 2% p.a. legen und nach 10 Jahren (in $t = 10$) einen Betrag von 100.000€ angespart haben.

Wie hoch ist der jährlich notwendige Ansparbetrag bei jährlicher und bei vierteljährlicher Verzinsung?

Beispiel: Annuität

Lösung:

jährliche Verzinsung:

$$q = 1{,}02 \qquad Ann = \frac{100.000}{1{,}02^{10}} \cdot \frac{1{,}02^{10} \cdot (1{,}02 - 1)}{1{,}02^{10} - 1} = 9.132{,}65$$

vierteljährliche Verzinsung:

$$q = 1{,}005^4 \qquad Ann = \frac{100.000}{1{,}005^{40}} \cdot \frac{1{,}005^{40} \cdot (1{,}005^4 - 1)}{1{,}005^{40} - 1} = 9.126{,}37$$

Unendliche Rente

- Bei $n \to \infty$ vereinfacht sich der Barwert einer endlichen Rente:

Barwert einer unendlichen Rente

$$K_0 = \frac{R}{(q-1)} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

- Somit kann ein gegebener Kapitalstock umgekehrt in einen unendlichen jährlichen Zahlungsstrom transformiert werden:

Unendliche Annuität bei gegebenem Kapitalstock

$$Ann = R = K_0 \cdot (q-1) \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Steigende und fallende Renten

- Eine jährliche Rente, die im ersten Jahr R_1 beträgt und dann jedes Jahr um die Wachstumsrate g ansteigt, ergibt folgenden Zahlungsstrom:

$$
\begin{aligned}
t = 1&: \quad R_1 \\
t = 2&: \quad R_2 = R_1 \cdot (1 + g) \\
t = 3&: \quad R_3 = R_2 \cdot (1 + g) = R_1 \cdot (1 + g)^2 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Steigende und fallende Renten (Fortführung)

Barwert einer steigenden Rente

$$K_0 = R_1 \cdot \frac{q^n - (1+g)^n}{q^n \cdot (q - 1 - g)} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Höhe der ersten Rentenzahlung

$$R_1 = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q - 1 - g)}{q^n - (1+g)^n} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Steigende und fallende unendliche Rente

Barwert einer unendlichen steigenden Rente

$$K_0 = \frac{R_1}{(q - 1 - g)} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Unendliche steigende Rente bei gegebenem Kapitalstock

$$R_1 = K_0 \cdot (q - 1 - g) \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

Notwendige Bedingung für beide Gleichungen: $g < (q - 1)$

Beispiel: Steigende Rente

Frage:

Sie haben eine Pensionsvorsorge abgeschlossen, die Ihnen ab Pensionsantritt ($t = 40$) eine wertgesicherte Rente von 15.000€ jährlich über 15 Jahre zusichert. Der Zinssatz beträgt 2,25% p.a., die Wertsicherung beträgt 0,75% pro Jahr. Welcher Betrag muss sich zum Zeitpunkt des Pensionsantritts auf Ihrem Pensionsvorsorgekonto befinden?

Beispiel: Steigende Rente

Lösung:

Benötigter Betrag ein Jahr vor Pensionsantritt = Rentenbarwert:

$$K_{39} = 15.000 \cdot \frac{1{,}0225^{15} - (1 + 0{,}0075)^{15}}{1{,}0225^{15} \cdot (1{,}0225 - 1 - 0{,}0075)} = 198.827{,}43$$

Benötigter Betrag zum Pensionsantritt:

$$K_{40} = 198.827{,}43 \cdot 1{,}0225 = 203.301{,}05$$

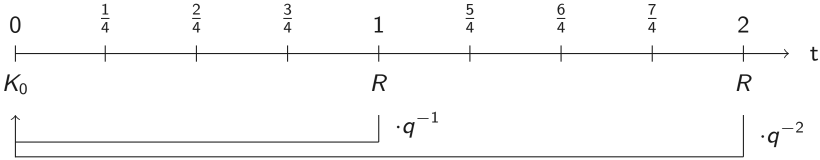
Rentenbarwert

Wichtiger Grundsatz:

Der Barwert jeder Rente bezieht sich immer auf den Zeitpunkt, der **eine Periode vor der ersten Rentenzahlung** liegt!

Jährliche Rente bei unterjähriger Verzinsung

Beispiel: 2-jährige Rente bei vierteljährlicher Verzinsung
(Rentenperiode > Zinsperiode)



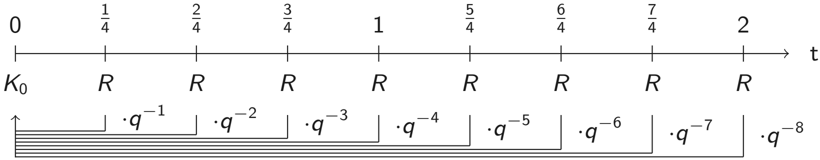
Vorgehensweise:

Es wird zunächst der effektive jährliche Aufzinsungsfaktor q berechnet, womit der Rentenbarwert mit der bekannten Formel ermittelt werden kann.

$$K_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{4}\right)^4 \text{ und } n = 2$$

Unterjährige Rente bei unterjähriger Verzinsung

Beispiel: Rente über 8 Quartale bei vierteljährlicher Verzinsung (Rentenperiode = Zinsperiode)



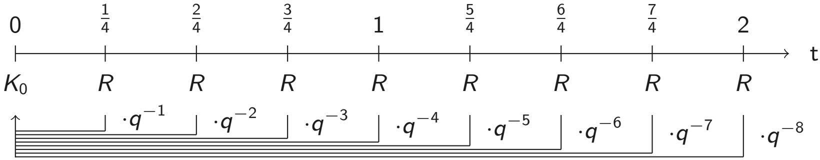
Vorgehensweise:

Die Periodenlänge wird auf 1/4 Jahr angepasst, und es wird mit dem vierteljährlichen Aufzinsungsfaktor q gearbeitet.

$$K_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \qquad \text{mit } q = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{4}\right) \text{ und } n = 8$$

Unterjährige Rente bei jährlicher Verzinsung

Beispiel: Rente über 8 Quartale bei jährlicher Verzinsung
(Rentenperiode < Zinsperiode)



Vorgehensweise:

Die Periodenlänge wird auf 1/4 Jahr angepasst, und es wird mit dem vierteljährlichen Aufzinsungsfaktor q gearbeitet.

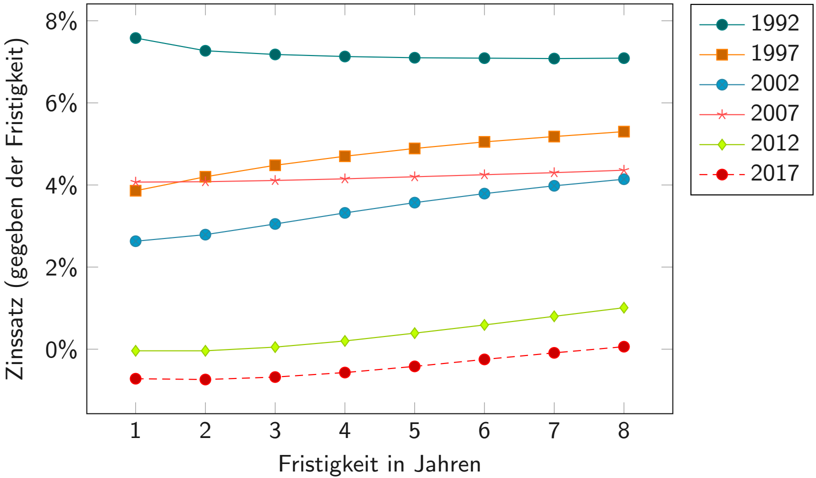
$$K_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \qquad \text{mit } q = (1+r)^{\frac{1}{4}} \text{ und } n = 8$$

Zinsstruktur und Zinskurven

Grundlagen

- Zinssätze variieren mit den Fristigkeiten, was durch die sog. Zinskurve oder Zinsstruktur (engl.: *term structure of interest rates*) zum Ausdruck gebracht wird.
- Je nach Verlauf der Zinskurve spricht man von einer...
  - *steigenden Zinsstruktur*, wenn die Zinssätze umso höher sind, je langfristiger die Mittel gebunden sind; da moderat steigende Zinskurven im langjährigen Mittel überwiegen, spricht man dabei auch von einer *normalen Zinsstruktur*;
  - *flachen Zinsstruktur*, wenn die Zinssätze für alle Fristigkeiten gleich sind;
  - *fallenden Zinsstruktur*, wenn die Zinssätze für kurze Fristigkeiten höher sind als die Zinssätze für lange Fristigkeiten; man spricht dabei auch von einer *inversen Zinsstruktur*.

Historische Zinskurven



Kassa- und Terminzinssätze

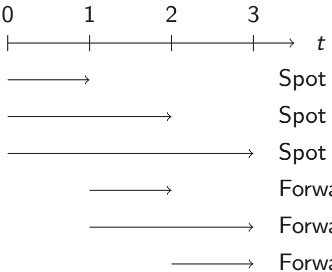
Kassazinssätze (spot rates) r_T

Kassazinssätze bezeichnen Zinssätze, die für den Zeitraum von $t = 0$ bis $t = T$ gelten, und somit eine Fristigkeit von T Jahren aufweisen.

Terminzinssätze (forward rates) $r_{X,N}$

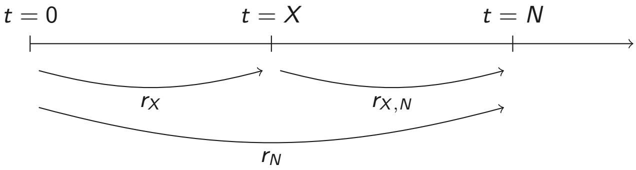
Terminzinssätze bezeichnen Zinssätze, die auf Zahlungsströme Anwendung finden, die zwar heute vereinbart werden aber erst in der Zukunft beginnen. Die forward rate $r_{X,N}$ gilt für den Zeitraum von $t = X$ bis $t = N$, und weist somit eine Fristigkeit von $N - X$ Jahren auf.

Terminzinssätze



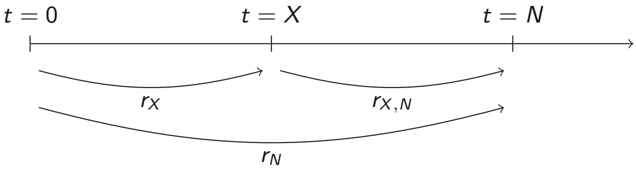
- r_1: Spot Rate für Jahresgelder
- r_2: Spot Rate für Zwei-Jahresgelder
- r_3: Spot Rate für Drei-Jahresgelder
- $r_{1,2}$: Forward Rate für Jahresgelder beginnend in t_1
- $r_{1,3}$: Forward Rate für Zwei-Jahresgelder beginnend in t_1
- $r_{2,3}$: Forward Rate für Jahresgelder beginnend in t_2

Terminzinssätze - Herleitung



Unter Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes, in dem Soll- und Habenzinsen gleich sind, ergeben sich die forward rates aufgrund der **Arbitragefreiheitsbedingung** zwingend aus den spot rates.

Terminzinssätze - Herleitung



Implizite forward rate bei diskreter Verzinsung

$$(1 + r_N)^N = (1 + r_X)^X \cdot (1 + r_{X,N})^{N-X} \quad \Rightarrow \quad r_{X,N} = \sqrt[N-X]{\frac{(1 + r_N)^N}{(1 + r_X)^X}} - 1$$

Implizite forward rate bei stetiger Verzinsung

$$\mathrm{e}^{N \cdot r_N} = \mathrm{e}^{X \cdot r_X} \cdot \mathrm{e}^{(N-X) \cdot r_{X,N}} \quad \Rightarrow \quad r_{X,N} = \frac{N \cdot r_N - X \cdot r_X}{N - X}$$

Beispiel: Terminzinssätze

Frage:

Es gilt folgende Zinsstruktur:

Fristigkeit	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Spot Rate	2,6%	2,9%	3,4%

Wie hoch sind die Forward Rates $r_{1,2}$ und $r_{1,3}$
bei diskreter und bei stetiger Verzinsung?

Beispiel: Terminzinssätze

Lösung:

Diskrete Verzinsung:

$$r_{1,2} = \sqrt[2-1]{\frac{(1+0{,}029)^2}{(1+0{,}026)^1}} - 1 = 3{,}2009\%, \quad r_{1,3} = \sqrt[3-1]{\frac{(1+0{,}034)^3}{(1+0{,}026)^1}} - 1 = 3{,}8023\%$$

Stetige Verzinsung:

$$r_{1,2} = \frac{2 \cdot 0{,}029 - 1 \cdot 0{,}026}{2-1} = 3{,}2000\%, \qquad r_{1,3} = \frac{3 \cdot 0{,}034 - 1 \cdot 0{,}026}{3-1} = 3{,}8000\%$$